O ROZWIĄZYWANIU

RÓWNAŃ ALGIEBRYCZNYCH OGÓLNYCH

ZA POMOCĄ CAŁEK OZNACZONYCH

NAPISAŁ

WŁADYSŁAW KRETKOWSKI,

Inżynier dróg i mostów, były uczeń dyplomowany szkoły dróg i mostów w Paryżu, magister nauk matematycznych uniwersytetu w Paryżu.

Osobne Odbicie z Pamiętnika Akademii umiejętności Wydział matematyczno-przyrodniczy, tom VII.

W KRAKOWIE,
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO,
pod zarządem Ignacego Stelcla.
1882.

O rozwiązywaniu równań algiebrycznych ogólnych

ZA POMOCĄ CAŁEK OZNACZONYCH

NAPISAŁ

WŁADYSŁAW KRETKOWSKI.

Rozwiązywanie równań, jako główny przedmiot algiebry, zajmowało od dawna wielu matematyków. Wynikiem tych prac jest, że równania liczebne nie przedstawiają już właściwie trudności, chyba tylko długość rachunków, co zresztą zdaje się leżeć już w saméj naturze zadania, umiemy bowiem, dzięki tym pracom, oznaczyć dokładnie liczbę piérwiastków zawartych w danym zakresie, oraz obliczyć je dokładnie lub z danem przybliżeniem. Równania ogólne przedstawiają więcéj trudności. Po pracach Ruffiniego, Abela, Galoisa, Wantzela, Bettiego, Camille Jordana i innych, wiemy, że rozwiązanie za pomocą pierwiastników jest niemożebném dla równań ogólnych stopnia wyższego nad czwarty. Hermite, Brioschi i inni rozwiązali równania stopnia piątego za pomocą funkcyj eliptycznych. Rozwiązania inne, jakie podano, jużto za pomocą szeregów lub innych wyrażeń nieskończonych, jużto za pomocą całek oznaczonych, są w ogólności mało znane i powiedzmy, że w ogólności przedstawiają wiele niedostatków. I tak prace De La Grangea z przeszłego wieku, a mianowicie praca z roku 1770, pod tytułem: *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries (Lu à l'Académie le 18 janvier et le 5 avril 1770*) ogłoszona w piśmie: *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, t. 24, 1770*, a którą to pracę, nie posiadając ostatniego pisma, cytuję podług dzieła: *Oeuvres de Lagrange, publiées par le soins de* M. J. A. Serret, *sous les auspices de Son Excellence le Ministre de l'Instruction publique. Tome troisième. Paris, Gauthier-Villars. 1869.* 4ka, w którém znajduje się przedrukowaną na stronicach 5 do 73. Znakomita ta praca na swój czas, nie uwzględnia zbieżności szeregów, gdyż w ten czas pojęcia o zbieżności i działaniach z szeregami prawie że nie istniały, a przytém ma pewien charakter szczególności. Coś podobnego możnaby powiedzieć o pracach innych, jak De La Placea, Paoliego, Ruffiniego i t. d.

Co do rozwiazywania równań za pomocą całek oznaczonych istnieją prace, ale z żadną spotkać się nie mogłem. Wspomnę więc tylko o jednéj, o któréj znalazłem wzmiankę w piśmie: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences,.... tome 17,.... Paris, Bachelier,.... 1843,* 4ka, stronic 4, 1433. Tam na stronicy 938 znajduje się praca pod tytułem: *Rapport sur un Mémoire de* M. Laurent.... *Comissaires MM.* Liouville, Cauchy *rapporteur,* w któréj Cauchy przypomina, że przedstawił swoje twierdzenie o rozwijalności funkcyj na szeregi postępujące podług potęg całkowitych dodatnich 11 października 1831 roku Akademii w Tu-

rynie, a którego twierdzenie Laurenta jest niejako uogólnieniem, i co tu najważniejsze, mówi, że przedstawił Akademii Nauk w Paryżu 22 listopada 1819 roku pracę o rozwiązywaniu równań za pomocą całek oznaczonych i że z niéj jest umieszczony wyjątek w piśmie: *Analyse des travaux de l'Académie,* którego jednakże nigdy nie widziałem. Oto mniéj więcéj co mogę powiedzieć o stanie kwestyi. Przechodząc do opisania, co udało mi się zrobić dla rozwiązania równań algiebrycznych za pomocą całek oznaczonych, zastrzegam, że być może, że już zostałem uprzedzony przez innych, a tylko prace ich nie doszły do mojéj wiadomości. Punktem wyjścia była mi wyżéj wymiéniona praca De La Grangea.

Niech będzie równanie algiebryczne stopnia m

(1) $$o = f(z),$$

w którém

$$f(z) = \sum_{n=o}^{n=m} a_n z^n = a_m \prod_{n=1}^{n=m} (z - z_n)$$

m zaś oznacza liczbę całkowitą dodatnią, z ilość nieznaną, a $m+1$ ilości a_n; $n = 0, 1, 2, \ldots, m$, są współczynnikami stałémi niezależnémi od nieznanéj z.

Można przyjąć, że dane równanie nie posiada piérwiastków równych, algiebra bowiem podaje sposoby na pozbycie się takowych piérwiastków. Przypuścimy także, że piérwiastki danego równania nie posiadają modułów równych. W przeciwnym bowiem razie przez stósowną przemianę początku współrzędnych, albo inaczéj mówiąc, przez dobranie stósownéj ilości a i podstawienie

$$z = a + y$$

zamienilibyśmy dane równanie na inne

$$o = f(a + y)$$

któregoby piérwiastki, uważając y za ilość nieznaną, nie miały już modułów równych.

Możemy więc założyć, że równanie (1), w którém uważamy za ilość nieznaną

$$z = pe^{ki}\ ;\ i^2 = -1$$

ma moduły swych m piérwiastków

$$z_n = p_n e^{k_n i};\ n = 1, 2, \ldots, m$$

nierówne i że takowe są uporządkowane w szeregu rosnącym

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_m .$$

Przyjmiemy przytém jako wiadome z algiebry, że

(2) $$\prod_{n=1}^{n=m} (-z_n) = a_o a_m^{-1},$$

oraz że we wzorze

(3) $$\sum_{n=1}^{n=m} z_n^{\nu} = s_{\nu};\ \nu = -\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

umiemy wyrazić s_ν przez współczynniki danego równania, które zbytecznie byłoby tu wypisywać.

Jeżeli przez l rozumieć będziemy znak logarytmów naturalnych, to wtedy ponieważ

$$z^{-n} f(z) = z^{-n} a_m \prod_{\mu=1}^{\mu=m} (z - z_\mu) =$$

$$= \left\{ \prod_{\mu=1}^{\mu=n} (1 - z_\mu z^{-1}) \right\} \left\{ a_m \prod_{\mu=n+1}^{\mu=m} (-z_\mu) \right\} \left\{ \prod_{\mu=n+1}^{\mu=m} (1 - z_\mu^{-1} z) \right\};\ n = 1, 2, \ldots, m-1,$$

jest

$$l\left\{z^{-n}f(z)\right\} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} l(1-z_\mu z^{-1}) + l\left\{a_m \prod_{\mu=n+1}^{\mu=m}(-z_\mu)\right\} + \sum_{\mu=n+1}^{\mu=m} l(1-z_\mu^{-1}z)$$

$$n = 1, 2, \ldots, m-1 \; .$$

Przypuśćmy teraz, że ilość zmienna z zadość czyni podwójnej nierówności

$$p_n < p < p_{n+1} \; ; \quad n = 1, 2, \ldots, m-1 \; ,$$

to wtedy moduły ilości

$$z_\mu z^{-1} \; ; \quad \mu = 1, 2, \ldots, n \; ,$$

$$z_\mu^{-1} z \; ; \quad \mu = n+1, n+2, \ldots, m \; ,$$

są mniejszémi od jedności. Na mocy więc znanego twierdzenia Cauchyego funkcyje

$$l(1-z_\mu z^{-1}) \; ; \quad \mu = 1, 2, \ldots, n$$

$$l(1-z_\mu^{-1}z) \; ; \quad \mu = n+1, n+2, \ldots, m$$

można rozwinąć na szeregi zbieżne postępujące podług potęg całkowitych dodatnich drugich wyrazów dwumianów, będących pod znakiem logarytmu, i co tu najważniejsze, że ich zbieżności, rozciągające się w różnych zakresach, mają zakres wspólny

$$p_n < p < p_{n+1} \; ; \quad n = 1, 2, \ldots, m-1 \; .$$

Na mocy więc téj uwagi, wnosimy, że szereg

$$l\left\{z^{-n}f(z)\right\} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} -\nu^{-1}(z_\mu z^{-1})^\nu + l\left\{a_m \prod_{\mu=n+1}^{\mu=m}(-z_\mu)\right\} + \sum_{\mu=n+1}^{\mu=m}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} -\nu^{-1}(z_\mu^{-1}z)^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left\{-\nu^{-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_\mu^\nu\right\} z^{-\nu} + l\left\{a_m \prod_{\mu=n+1}^{\mu=m}(-z_\mu)\right\} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left\{-\nu^{-1}\sum_{\mu=n+1}^{\mu=m} z_\mu^{-\nu}\right\} z^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=-1}\left\{\nu^{-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_\mu^{-\nu}\right\} z + l\left\{a_m \prod_{\mu=n+1}^{\mu=m}(-z_\mu)\right\} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left\{-\nu^{-1}\sum_{\mu=n+1}^{\mu=m} z_\mu^{-\nu}\right\} z^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} A_{n,\nu} z^\nu \; ; \quad n = 1, 2, \ldots, m-1$$

jest zbieżnym w zakresie

$$p_n < p < p_{n+1} \; ; \quad n = 1, 2, \ldots, m-1 \; .$$

Można więc (wnosząc z powyższego wzoru) rozwinąć funkcyję

$$l\left\{z^{-n}f(z)\right\}$$

na szereg postępujący podług potęg całkowitych odjemnych i dodatnych, zbieżny w zakresie

$$p_n < p < p_{n+1} \; ; \quad n = 1, 2, \ldots, m-1 .$$

Jeżeli więc rozwinięcie wykonamy za pomocą znanego twierdzenia Laurenta, które tenże przedstawił w roku 1843 Akademii Nauk w Paryżu, to współczynniki $A_{n,\nu}$ rozwinięcia wyrażą się w znany sposób przez całki oznaczone, a które zbytecznie byłoby tu wypisywać i możemy je odtąd uważać za znane.

Z powyższego wnieść można, że ponieważ jest dla

$$n=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

$$A_{n,-\nu} = -\nu^{-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_\mu^\nu$$

$$A_{n,0} = l\left\{ a_m \prod_{\mu=n+1}^{\mu=m} (-z_\mu) \right\}$$

$$A_{n,\nu} = -\nu^{-1} \sum_{\mu=n+1}^{\mu=m} z_\mu^{-\nu}$$

czyli prościéj dla

$$n=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

jest

(4) $$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_\mu^\nu = -\nu A_{n,-\nu}$$

(5) $$\prod_{\mu=n+1}^{\mu=m} (-z_\mu) = a_m^{-1} e^{A_{n,0}}$$

(6) $$\sum_{\mu=n+1}^{\mu=m} z_\mu^{-\nu} = -\nu A_{n,\nu}\ .$$

Ze wzoru (5), biorąc w nim $n = 1$ i otrzymanym wynikiem dzieląc stósownie wzór (2), otrzymujemy wyrażenie na piérwiastek z_1 o najmniejszym module

$$z_1 = -a_0 e^{-A_{1,0}}.$$

Podobnież jeżeli podzielimy stósownie wzór (5), gdy w nim podstawimy $n-1$ zamiast n, przez piérwotny, otrzymamy dla $m-2$ piérwiastków o modułach pośrednich wyrażenia

$$z_n = -e^{A_{n-1,0}-A_{n,0}};\ n=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1\ .$$

Nakoniec wzór (5), biorąc w nim $n=m-1$, daje wyrażenie na piérwiastek modułu największego

$$z_m = -a_m^{-1} e^{A_{m-1,0}}\ .$$

Można otrzymać jeszcze nieskończoną liczbę wyrażeń innych na piérwiastki równania danego. Równanie (4), biorąc w nim $n=1$, daje wprost

$$z_1 = \left(-\nu A_{1,-\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}};\ \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

Następnie zastąpiwszy w tymże wzorze (4) n przez $n-1$ i odjąwszy od poprzedniego dla n, otrzymamy wyciągając piérwiastek stopnia ν wyrażenia dla $m-2$ piérwiastków o modułach pośrednich

$$z_n = \left\{ \nu \left(A_{n-1,-\nu} - A_{n,-\nu} \right) \right\}^{\frac{1}{\nu}};\ n=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

Nakoniec biorąc we wzorze (4) $n=m-1$ i odejmując wynik od (3), po wyciągnięciu piérwiastku stopnia ν otrzymamy wyrażenie piérwiastka o module największym

$$z_m = \left(s_\nu + \nu A_{m-1,-\nu} \right)^{\frac{1}{\nu}};\ \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

Podobnież biorąc we wzorze (6) $n=1$ i odejmując od (3), otrzymamy

$$z_1 = \left(s_{-\nu} + \nu A_{1,\nu} \right)^{-\frac{1}{\nu}};\ \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

Biorąc we wzorze (6), że n przybiéra znaczenia $n-1$ i n i odejmując otrzymamy

$$z_n = \left\{ \nu \left(A_{n,\nu} - A_{n-1,\nu} \right) \right\}^{-\frac{1}{\nu}}; \quad \nu = 1, 2, \ldots; \quad n = 2, 3, \ldots, m-1$$

Podstawienie zaś we wzorze (6) że $n = m-1$ daje wprost

$$z_m = \left(-\nu A_{m-1,\nu} \right)^{-\frac{1}{\nu}}; \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Dla uniknięcia trudności pochodzących z tego, że piérwiastniki mają ν znaczeń, można się ograniczyć do znaczeń $\nu = 1$. Wtedy wieloznaczność znika i mamy ostatecznie wyrażenia: na piérwiastek najmniejszego modułu

$$z_1 = -a_0 \, e^{-A_{1,0}} = -A_{1,-1} = \left(s_{-1} + A_{1,1} \right)^{-1}$$

na m—2 piérwiastki o modułach pośrednich

$$z_n = -e^{A_{n-1,0} - A_{n,0}} = A_{n-1,-1} - A_{n,-1} = \left(A_{n,1} - A_{n-1,1} \right)^{-1}; \; n = 2, 3, \ldots, m-1,$$

na piérwiastek o największym module

$$z_m = -a_m^{-1} \, e^{A_{m-1,0}} = s_1 + A_{m-1,-1} = -A_{m-1,1}^{-1} \, .$$

Lwów, 11 lipca, 1881 roku.

DODATEK.

Po napisaniu powyższych uwag o rozwiązywaniu równań algiebrycznych ogólnych za pomocą całek oznaczonych, dowiedziałem się o istnieniu innych jeszcze prac o tym przedmiocie. Winienem tu o nich wspomnieć, i nad temi, które udało mi się czytać, porobić uwagi wykazujące różnice, jakie zachodzą pomiędzy pracami poprzedników i moją pracą.

Piérwszą z nich w porządku chronologicznym jest praca umieszczona w piśmie: *Mémoires présentés à l' Institut des sciences, lettres et arts, par divers savans, et lus dans ses assemblées. Sciences mathématiques et physiques. Tome premier. Paris.* Baudouin, *imprimeur de l'Institut. Frimaire an 14 = (1805)* 4ka, stronic 4, 16, 670; tablic (12?). Na stronicach 567 do 586, znajduje się praca pod tytułem następującym: *Méthode générale pour sommer, par le moyen des intégrales définies, la suite donnée par le théoreme de M.* Lagrange, *au moyen de laquelle il trouve une valeur qui satisfait à une équation algébrique ou transcendante, par* Marc-Antoine Parseval. *Lu le 17 floréal an 12.* Praca ta zdaje się być piérwszą, jaka się pojawiła o tym przedmiocie, autor bowiem nic nie wspomina, aby miał poprzedników. W obec dzisiejszéj nauki, praca ta pozostawia wiele do życzenia, a przedewszystkiém przedstawia tę niedogodność, że w razie równania algiebrycznego wyższego stopnia nad piérwszy, daje tylko jeden piérwiastek zamiast dawać je wszystkie. Nie będę zatrzymywał uwagi czytelnika nad nią, i zakończę uwagą, że Jacobi w pracy, o któréj mówię poniżéj, naznacza rok 1806 jako rok wyjścia tomu, zawiérającego pracę Parsevala, podczas gdy na tomie wydrukowano rok 1805, a egzemplarz, który czytałem i który pochodzi ze zbioru ksiąg Aleksandra Chodkiewicza ma na okładce wyciśnięty rok 1804, co zresztą zdają się potwierdzać zwyczaje księgarskie, że najczęściéj drukują datę późniejszą. Praca

zaś, jak z powyższego widzimy, czytaną była w Instytucie w roku 1803, tę więc datę należałoby uważać, jak się zdaje, za prawdziwą.

Drugą pracą byłaby praca CAUCHYEGO, o któréj poprzednio wspomniałem, i inna (a może ta sama co do treści co poprzednia) tegoż autora, zawarta w 19 zeszycie dziennika politechnicznego, wspomniana przez JACOBIEGO w pracy, o któréj mówię poniżéj. Dotąd jednakże nie udało mi się czytać ani jednéj, ani drugiéj.

Trzecią tedy, a może czwartą, byłaby praca JACOBIEGO z roku 1827 dwukrotnie już wyżéj wspomniana. Znajduje się ona w piśmie: *Journal für die reine Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von* A. L. CRELLE. *Mit thätiger Beförderung hoher Koniglich-Preussischer Behörden. Zweiter Band, in 4 Heften, mit 5 Kupfertafeln. Berlin, bei* G. REIMER. 1827. 4ka, stronic 4 i 400; tablic 5. Tam na stronicach 1 do 8, pod tytułem: *Ueber den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale. Vom Hernn prof.* JACOBI. Autor wspomina naprzód o PARSEVALU i powiadą, że zamierzył pracę poprzednika uogólnić. Przedewszystkiém trzeba powiedzieć o téj pracy, że autor w niéj nie objął wszystkich równań algiebrycznych, lecz tylko miał na uwadze równania, mające co najwyżéj piérwiastki złożone sprzężone, a więc tylko równania o współczynnikach rzeczywistych i przytém w razie piérwiastków sprzężonych nie wypowiedział, jak prowadzić należałoby rachunki. O tém przekonać się można ze słów autora zawartych na stronicy 3 w wierszach 17 do 21. Trudności te jednakże dają się usunąć. Nie można jednak zrozumieć, dla czego JACOBI nie wspomina nic o DE LA GRANGE'U, którego sława nie mogła być mu nieznaną, tém bardziéj, że autor idzie drogą wskazaną przez DE LA GRANGE'A, którą i ja także poszedłem. Wzory JACOBIEGO oprócz tego, że są szczególniejsze od moich, gdyż mają na uwadze tylko równania o współczynnikach rzeczywistych, są bardziéj złożone od moich, podczas gdy moje stosują się do równań o współczynnikach złożonych (urojonych) i są prostsze co do kształtu. Różnica zaś kształtu pochodzi także z różnych dróg, jakiemi zostały otrzymane. JACOBI użył do oznaczenia współczynników w rozwinięciu DE LA GRANGE'A, wzoru na rozwijanie funkcyj rzeczywistych na szeregi kątowe (gonjometryczne) kształtu przypisywanego powszechnie FOURIEROWI

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (A_n \text{ dos } nz + B_n \text{ wst } nz) \quad ,$$

a który autor przypisuje EULEROWI i twierdzi, że ten wzór znajduje się w pracy tegoż ostatniego z roku 1777, umieszczonéj w *Nova Acta* z 1798 roku. Ja zaś użyłem wzoru LAURENTA, podanego w roku 1843 przez tego ostatniego, na rozwinięcie funkcyi zmiennéj złożonéj (urojonéj) na szeregi potęgowe podwójne

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n z^n \quad ;$$

co pozwoliło rozwiązać zadanie prósciéj i ogólniéj. Nakoniec powiem, że uważam tak pracę JACOBIEGO jak i moją, tylko jako rozwinięcie myśli DE LA GRANGE'A.

(Lwów 25 grudnia 1881 r.).